فصل پنجم

برخی توزیع‌های احتمال

۱.۵ مقدمه

در فصل سوم در مورد به‌دست آوردن توزیع احتمال یک متغیر تصادفی بحث کردیم. در این فصل می‌خواهیم توزیع احتمال چند متغیر تصادفی به‌خصوص را به‌دست آوریم.

بعضی از متغیرهای تصادفی دارای یک الگوی خاص هستند و می‌توان برای آن‌ها یک نوع توزیع احتمال را در نظر گرفت، برای مثال در انجام آزمایشات پرتاب یک تاس ۷ مرتبه و پرتاب یک نیزه به طرف هدف، فرض کنید که:

$X =$ تعداد مشاهده عدد ۴ در ۷ مرتبه پرتاب تاس

$Y =$ تعداد برخورد به هدف نیزه در ۵ مرتبه پرتاب نیزه

همان‌طور که دیده می‌شود این دو متغیر تصادفی دارای یک شکل به‌خصوص هستند، در حقیقت هر دو تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش مستقل را بیان می‌کنند. حال اگر توزیع احتمال برای تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش مستقل را به‌دست آوریم آنگاه توزیع احتمال برای تعداد زیادی متغیر تصادفی مشابه با X و Y گفته شده در بالا را به‌دست آورده‌ایم.

در این فصل ابتدا چند توزیع احتمال گسسته خاص و سپس چند توزیع احتمال پیوسته خاص را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

Scanned with CamScanner

۲.۵ توزیع برنولی[۱]

آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای دو نتیجه موفقیت با احتمال p و شکست با احتمال $q=۱-p$ باشد. چنین آزمایشی را آزمایش برنولی گویند. برای مثال پرتاب یک سکه یک آزمایش برنولی است که در آن موفقیت مشاهده شیر با $p=\frac{۱}{۲}$ و مشاهده خط شکست با $q=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. همچنین در پرتاب یک تاس که در آن موفقیت مشاهده عدد ۴ با $p=\frac{۱}{۶}$ و مشاهده عدد غیر از ۴ شکست با $q=\frac{۵}{۶}$ است. اگر متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X=\begin{cases}۱ & \text{اگر نتیجه آزمایش موفقیت باشد}\\ ۰ & \text{اگر نتیجه آزمایش شکست باشد}\end{cases}$$

در این صورت متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی برنولی گوئیم و آن را با نماد $X\sim B(۱,p)$ نمایش داده و گوئیم X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است (عدد ۱ نمایانگر انجام یک بار آزمایش است). تابع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

x	۰	۱
$f_X(x)=P(X=x)$	$۱-p$	p

که آن را می‌توان در فرمول زیر خلاصه کرد:

(۱.۵) تابع احتمال توزیع برنولی

$$f_X(x)=p^x(۱-p)^{۱-x}\quad ,\ x=۰,۱$$

در قضیه زیر امید ریاضی و واریانس این توزیع را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۵ اگر $X\sim B(۱,p)$ آنگاه $E(X)=p$ و $Var(X)=pq$.

اثبات

$$E(X)=(۰)(۱-p)+(۱)(p)=p$$

$$E(X^۲)=(۰^۲)(۱-p)+(۱^۲)(p)=p$$

بنابراین

$$Var(X)=p-p^۲=p(۱-p)=pq$$

مثال ۱.۲.۵ یک تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

Scanned with CamScanner

اگر عدد ۴ مشاهده شود

$$X=\begin{cases}۱ & \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

در این صورت $X\sim B\left(۱,\frac{۱}{۶}\right)$ و همچنین:

$$f_X(x)=\left(\frac{۱}{۶}\right)^x\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۱-x}\quad,\quad x=۰,۱$$

$$E(X)=\frac{۱}{۶}\quad,\quad Var(X)=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۵}{۶}\right)=\frac{۵}{۳۶}$$

۳.۵ توزیع دو جمله‌ای[1]

آزمایش تصادفی که از انجام چند آزمایش مستقل برنولی به‌وجود می‌آید را آزمایش دوجمله‌ای گویند. برای مثال انتخاب ۵ مهره با جای‌گذاری از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۶ مهره قرمز است و موفقیت برای ما مشاهده مهره قرمز است یک آزمایش دوجمله‌ای با احتمال موفقیت $\frac{۶}{۱۴}$ می‌باشد.

به‌طور کلی یک آزمایش دوجمله‌ای دارای خواص زیر است.

۱ـ آزمایش دوجمله‌ای از انجام n آزمایش مستقل برنولی به‌وجود آمده است.

۲ـ در آزمایش‌های برنولی احتمال موفقیت p (و شکست $q=۱-p$) می‌باشد که در تمام آزمایش‌ها برنولی مقداری ثابت است.

مثال ۱.۳.۵ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر موفقیت مشاهده شیر باشد، در این صورت یک آزمایش دوجمله‌ای با پارامترهای $n=۴$ و $p=\frac{۲}{۳}$ داریم.

مثال ۲.۳.۵ بسکتبالیستی ۶۰٪ از توپ‌هایش گل می‌شود. اگر او ۵ پرتاب مستقل انجام دهد و موفقیت برای او گل شدن توپ باشد، در این صورت یک آزمایش دوجمله‌ای با پارامترهای $n=۵$ و $p=۰/۶$ داریم.

تعریف ۱.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

$X=$ تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش مستقل برنولی

آنگاه X را یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p

1- Binomial Distribution

Scanned with CamScanner

باشد، آنگاه گوییم که X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است و آن را با نماد $X\sim B(n,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به دست آوردن تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای ابتدا مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۳.۳.۵ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر $X=$ تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه

الف- $P(X=۳)$ را محاسبه کنید.

ب- تابع احتمال X را به دست آورید.

حل با توجه به تعریف ۱.۵ داریم که $X\sim B(۴,\frac{۲}{۳})$ بنابراین:

الف- $P(X=۳)$ بدین معنی است که در ۴ مرتبه پرتاب سکه می‌خواهیم ۳ شیر مشاهده کنیم که یک حالت خاص آن HHHT با احتمال $(\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^{۳}$ است و تعداد حالات مشاهده ۳ شیر در ۴ مرتبه پرتاب سکه برابر $\binom{۴}{۳}$ است. بنابراین:

$$P(X=۳)=\binom{۴}{۳}(\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳})^{۴-۳}$$

ب- با انجام عملیات مشابه قسمت الف تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_X(x)=P(X=x)=\binom{۴}{x}(\frac{۲}{۳})^{x}(\frac{۱}{۳})^{۴-x}\quad,\quad x=۰,۱,۲,۳,۴$$

در حالت کلی اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه $P(X=x)$ بدین معنی است که در n آزمایش مستقل برنولی ما x موفقیت و n-x شکست داشته باشیم که در یک حالت خاص احتمال آن برابر $p^x q^{n-x}$ است و تعداد حالاتی که می‌توان در n آزمایش x موفقیت مشاهده کرد برابر $\binom{n}{x}$ است و بنابراین تابع احتمال Xبرابر است با:

(۲.۵)

تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای
$f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\quad,\quad x=۰,۱,۲,\dots,n$

توجه کنید که توزیع برنولی یک حالت خاص توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n=۱ است. اگر در n آزمایش برنولی مستقل، متغیر تصادفی X_i برابر نتیجه i-امین آزمایش باشد آنگاه $X=X_۱+X_۲+\dots+X_n$ تعداد موفقیت‌ها در این n آزمایش برنولی مستقل و $X\sim B(n,p)$ است. در زیر امید ریاضی و واریانس توزیع دوجمله‌ای را به‌دست می‌آوریم.

Scanned with CamScanner

قضیه ۲.۵ اگر $X\sim B(n,p)$ آنگاه $E(X)=np$ و $Var(X)=npq$.

اثبات با توجه به مطلب بالا داریم که $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ که X_1، X_2، ... و X_n از یکدیگر مستقل و هر یک دارای توزیع برنولی با پارامتر p هستند، بنابراین طبق خواص امید ریاضی و واریانس داریم که:

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p=np$$

$$Var(X)=Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\sum_{i=1}^{n}pq=npq$$

مثال ۴.۳.۵ یک تاس را ۵ بار پرتاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه عدد ۴ دقیقاً ۳ بار مشاهده شود را بیابید؟

ب- احتمال اینکه عدد ۴ حداکثر ۲ بار مشاهده شود را بیابید؟

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد مشاهده عدد ۴ در ۵ بار پرتاب تاس باشد آنگاه $X\sim B(5,\frac{1}{6})$ است که تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_X(x)=\binom{5}{x}(\frac{1}{6})^x(\frac{5}{6})^{5-x}\ ,\ x=0,1,\ldots,5$$

بنابراین:

الف- $$P(X=3)=f_X(3)=\binom{5}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^{5-3}=0/032$$

ب- $$P(X\le 2)=\sum_{x=0}^{2}f_X(x)=\binom{5}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5+\binom{5}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^4+\binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3$$
$$=0/9645$$

برای محاسبه احتمالات در توزیع دوجمله‌ای جدول (I) در ضمیمه ارائه گردیده است که در این جدول $P(X\le r)$ برای مقادیر $n=5,10,15,20$ و $p=0/1,0/2,0/25,\ldots,0/9$ محاسبه گردیده است، برای نمونه اگر $X\sim B(10,0/3)$ باشد، آنگاه از جدول (I) داریم که: $P(X\le 4)=0/8497$.

مثال ۵.۳.۵ یک آزمون انگلیسی شامل ۲۰ سؤال پنج گزینه‌ای است که در هر سؤال تنها یک گزینه درست می‌باشد. شخصی که اصلاً انگلیسی نمی‌داند در این آزمون شرکت می‌کند و سؤالات را به تصادف پاسخ می‌دهد.

Scanned with CamScanner

الف- انتظار دارید که چند سؤال را درست پاسخ دهد؟

ب- احتمال اینکه حداقل ۱۰ سؤال را درست پاسخ دهد را بیابید.

ج- احتمال اینکه بین ۲ تا ۷ سؤال را درست پاسخ دهد را بیابید.

د- احتمال اینکه دقیقاً ۹ سؤال را درست پاسخ دهد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد سؤالات درست پاسخ داده شده در بین ۲۰ سؤال باشد آنگاه $X \sim B(۲۰, ۰/۲)$ و بنابراین:

الف- $\mu = E(X) = np = ۲۰(۰/۲) = ۴$

پس انتظار داریم ۴ سؤال را درست پاسخ دهد.

ب- $P(X \geq ۱۰) = ۱ - P(X < ۱۰) = ۱ - P(X \leq ۹) = ۱ - ۰/۹۹۷۴ = ۰/۰۰۲۶$

ج- $P(۲ < X < ۷) = P(۲ < X \leq ۶) = P(X \leq ۶) - P(X \leq ۲) = ۰/۹۱۳۳ - ۰/۲۰۶۱$

$= ۰/۷۰۷۲$

د- $P(X = ۹) = P(X \leq ۹) - P(X \leq ۸) = ۰/۹۹۷۴ - ۰/۹۹۰۰ = ۰/۰۰۷۴$

۴.۵ توزیع فوق هندسی[۱]

در بخش قبل اگر آزمایش‌های برنولی تکرار شده، از یکدیگر مستقل نباشند آنگاه آزمایش به‌دست آمده دیگر آزمایش دوجمله‌ای نیست، برای نمونه در انتخاب ۵ مهره بدون جای‌گذاری از ظرفی که دارای ۸ مهره سفید و ۶ مهره قرمز است و موفقیت برای ما مشاهده مهره قرمز است، احتمال موفقیت در هر بار آزمایش تغییر می‌کند و دیگر آزمایش دوجمله‌ای نمی‌باشد. برای اینکه در حالت مستقل نبودن آزمایش‌های برنولی یا انتخاب بدون جای‌گذاری، نحوه انجام آزمایش و توزیع احتمال مربوطه را به‌دست آوریم؛ به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۴.۵ از بین ۳ شیمی‌دان و ۴ فیزیک‌دان می‌خواهیم یک کمیته ۵ نفری را انتخاب کنیم. تابع احتمال برای تعداد شیمی‌دان‌های انتخابی در کمیته را به‌دست آورید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد شیمی‌دان‌های انتخابی در کمیته ۵ نفری، (تعداد موفقیت‌ها در n

Scanned with CamScanner

آزمایش غیرمستقل) باشد آنگاه به‌واسطه انتخاب بدون جای‌گذاری افراد، X مقادیر $S_X=\{۱,۲,۳\}$ را می‌گیرد و

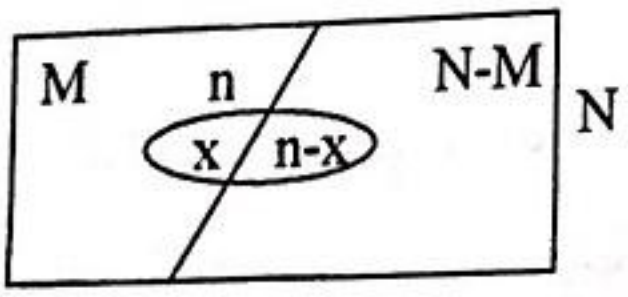
$$P(X=۱)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۴}}{\binom{۷}{۵}} \quad , \quad P(X=۲)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۵}}$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۳}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۵}}$$

و بنابراین:

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{۳}{x}\binom{۴}{۵-x}}{\binom{۷}{۵}} \quad , \quad x=۱,۲,۳$$

در حالت کلی جامعه مورد نظر ما به دو قسمت، جامعه موفقیت و جامعه شکست تقسیم می‌شود که یکی Mتایی و دیگر N-Mتایی است که N اندازه کل جامعه است. می‌خواهیم n عضو از این جامعه Nتایی را بدون جای‌گذاری انتخاب کنیم. چنین آزمایشی را آزمایش فوق هندسی گویند.



تعریف ۲.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

X = تعداد موفقیت‌ها در یک آزمایش فوق هندسی
= تعداد موفقیت‌ها در nآزمایش غیر مستقل

آنگاه X را یک متغیر تصادفی فوق هندسی گوییم و آن را با نماد $X\sim HG(N,M,n)$ نشان می‌دهیم که در آن N برابر تعداد اعضای جامعه، M برابر تعداد اعضای جامعه موفقیت و n برابر تعداد اعضای نمونه انتخابی است.

برای به‌دست آوردن تابع احتمال توزیع فوق هندسی توجه کنید که $P(X=x)$ بدین معنی است که در انتخاب n عضو از جامعه Nتایی (به $\binom{N}{n}$ طریق) می‌خواهیم x عضو از جامعه موفقیت Mتایی (به $\binom{M}{x}$ طریق) و مابقی از جامعه شکست (به $\binom{N-M}{n-x}$ طریق) باشند.

بنابراین:

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Scanned with CamScanner

حـــال چـــون در تـــرکیب $\binom{M}{x}$ بـــایستی $\circ \le x \le M$ و در تـــرکیب $\binom{N-M}{n-x}$ بـایستی $\circ \le n-x \le N-M$ باشد پس نتیجه می‌شود که:

$$max(\circ, n-N+M) \le x \le min(n,M)$$

بنابراین:

تابع احتمال توزیع فوق هندسی

$$f_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad max(\circ, n-N+M) \le x \le min(n,M) \qquad (۳.۵)$$

برای مثال در مثال (۱.۴.۵) داریم که:

$$X \sim HG(۷, ۳, ۵)$$

$$f_X(x) = \frac{\binom{۳}{x}\binom{۷-۳}{۵-x}}{\binom{۷}{۵}} \quad , \quad max(\circ, ۵-۷+۳) \le x \le min(۵,۳) \Rightarrow ۱ \le x \le ۳$$

مثال ۲.۴.۵ در انتخاب ۵ قطعه از بین ۴۰ قطعه که ۳ تای آن‌ها خراب است احتمال این را پیداکنید که حداکثر یک قطعه انتخاب شده خراب باشد.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد قطعه‌های خراب انتخاب شده در بین ۵ قطعه انتخابی باشد آنگاه $X \sim HG(۴۰, ۳, ۵)$ و $S_X = \{\circ, ۱, ۲, ۳\}$. بنابراین:

$$P(X \le ۱) = f_X(\circ) + f_X(۱) = \frac{\binom{۳}{\circ}\binom{۳۷}{۵}}{\binom{۴۰}{۵}} + \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳۷}{۴}}{\binom{۴۰}{۵}} = \circ/۹۶۳۵$$

در قضیه زیر امید ریاضی و واریانس توزیع فوق هندسی را بدون اثبات می‌آوریم.

قضیه ۳.۵ اگر $X \sim HG(N,M,n)$ آنگاه:

$$E(X) = \frac{nM}{N} \quad , \quad Var(X) = \frac{nM}{N}(۱ - \frac{M}{N})(\frac{N-n}{N-۱})$$

۱.۴.۵ تقریب توزیع فوق هندسی به‌وسیله توزیع دوجمله‌ای

اگر در آزمایش فوق هندسی n نسبت به N عدد کوچکی باشد آنگاه انتخاب اعضا در مراحل مختلف دارای احتمالات تقریباً یکسان هستند یعنی انتخاب اعضا را می‌توان تقریباً با جای‌گذاری در نظر گرفت و در نتیجه ما یک آزمایش دوجمله‌ای خواهیم داشت. در این حالت می‌توان توزیع فوق هندسی را با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $p = \frac{M}{N}$ و n تقریب زد. در حالت اگر زمانی که

Scanned with CamScanner

M و N به سمت بی نهایت میل کنند، مقدار $\frac{M}{N}=p$ ثابت باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\binom{n}{x}p^{x}(۱-p)^{n-x}$$

مثال ۳.۴.۵ در یک منطقه ۴۰۰۰ از ۱۰۰۰۰ رای دهنده با مالیات فروش مخالف می‌باشند. اگر ۱۵ نفر از افرادی که می‌توانند رأی دهند به‌طور تصادفی انتخاب شوند و از آن‌ها در مورد عقیده‌شان سؤال شود، احتمال اینکه حداکثر ۷ نفر از آن‌ها موافق مالیات فروش باشند را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد رای دهندگان در بین ۱۵ نفر باشد که موافق مالیات فروش هستند، آنگاه $X\sim HG(۱۰۰۰۰, ۶۰۰۰, ۱۵)$ و چون $n=۱۵$ نسبت به $N=۱۰۰۰۰$ عدد کوچکی است پس تقریباً $X\sim B(۱۵, ۰/۶)$ که در آن $p=\frac{M}{N}=\frac{۶۰۰۰}{۱۰۰۰۰}=۰/۶$. بنابراین با استفاده از جدول (I) داریم که:

$$P(X\le ۷)\approx\sum_{x=۰}^{۷}\binom{۱۵}{x}(۰/۶)^{x}(۰/۴)^{۱۵-x}=۰/۲۱۳۱$$

۵.۵ توزیع پواسون[1]

آزمایشی که تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص را به‌دست دهد، یک آزمایش پواسون نامیده می‌شود. این فاصله زمانی می‌تواند هر فاصله زمانی مانند ثانیه، دقیقه و... باشد و ناحیه مشخص نیز می‌تواند یک فاصله خطی یا مساحت یا حجم یا... باشد.

تعریف ۳.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

$X=$ تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص

آنگاه X را یک متغیر تصادفی پواسون گویند.

برای مثال اگر X تعداد تلفن‌هایی باشد که در یک ساعت به رئیس یک شرکت زده می‌شود یا X تعداد غلط‌های تایپی در هر صفحه یک کتاب باشد یا X تعداد تاکسی‌هایی باشد که در یک ساعت معین از یک چهار راه عبور می‌کنند، آنگاه X یک متغیر تصادفی پواسون است.

یک آزمایش پواسون بایستی دارای خواص زیر باشد:

1- Poisson Distribution

Scanned with CamScanner

۱ـ تعداد موفقیت‌هایی که در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص اتفاق می‌افتد از تعداد موفقیت‌هایی که در یک فاصله زمانی دیگر یا ناحیه دیگر اتفاق می‌افتد، مستقل باشد.

۲ـ احتمال اینکه یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه کوچک روی دهد، متناسب با طول فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد و بستگی به تعداد موفقیت‌ها در خارج از فاصله زمانی یا ناحیه نداشته باشد.

۳ـ احتمال روی‌دادن بیش از یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه مشخص کوچک، قابل صرف‌نظر باشد.

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پواسون به پارامتر μ یعنی میانگین تعداد موفقیت‌ها در فاصله زمانی یا ناحیه مورد نظر بستگی دارد. اگر X دارای توزیع پواسون با میانگین μ باشد آن را با نماد $X \sim P(\mu)$ نمایش می‌دهیم. در تعریف و قضیه زیر تابع احتمال و امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی پواسون را بدون اثبات می‌آوریم.

تعریف ۴.۵ اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد، آنگاه $X \sim P(\mu)$ و :

تابع احتمال توزیع پواسون

$$f_X(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \quad , \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۴.۵}$$

قضیه ۴.۵ اگر $X \sim P(\mu)$ آنگاه $E(X) = \mu$ و $Var(X) = \mu$.

مثال ۱.۵.۵ یک دستگاه چاپگر کامپیوتری به‌طور متوسط در هر ماه ۲ بار سرویس می‌شود.

الف- احتمال اینکه در یک ماه کمتر از ۲ بار سرویس شود را بیابید.

ب- احتمال اینکه در سه ماه این چاپگر حداقل ۲ بار سرویس شود را بیابید.

حل الف- اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد دفعاتی باشد که چاپگر در یک ماه سرویس می‌شود آنگاه $X \sim P(۲)$ و بنابراین:

$$P(X<۲) = f_X(۰) + f_X(۱) = \frac{e^{-۲}۲^{۰}}{۰!} + \frac{e^{-۲}۲^{۱}}{۱!} = ۰/۴۰۶$$

ب- اگر متغیر تصادفی Y برابر تعداد دفعاتی باشد که چاپگر در سه ماه سرویس می‌شود آنگاه طبق خاصیت دوم آزمایش پواسون $Y \sim P(۶)$ و بنابراین:

Scanned with CamScanner

$$P(Y\geq ۲)=۱-P(Y<۲)=۱-\left\{f_Y(۰)+f_Y(۱)\right\}=۱-\left\{\frac{e^{-۶}۶^{۰}}{۰!}+\frac{e^{-۶}۶^{۱}}{۱!}\right\}\simeq ۰/۹۸۲۶$$

برای محاسبه احتمالات در توزیع پواسون جدول (II) در ضمیمه ارائه گردیده است که در این جدول $P(X\leq r)$ برای مقادیر $\mu=۰/۱, ۰/۲, ..., ۱, ۱/۵, ۲, ..., ۱۸$ محاسبه شده است.

برای مثال اگر $X\sim P(۵)$ آنگاه از این جدول به‌دست می‌آوریم که: $P(X\leq ۳)=۰/۲۶۵۰$

مثال ۲.۵.۵ به‌طور متوسط در هر ده دقیقه ۶ مشتری به پای صندوق پرداخت یک فروشگاه می‌رسند.

الف- احتمال اینکه در ده دقیقه حداکثر ۴ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

ب- احتمال اینکه در پنج دقیقه حداقل ۲ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

حل الف- اگر $X =$ تعداد مشتریانی که در ده دقیقه به پای صندوق می‌رسند

آنگاه $X\sim P(۶)$ و $P(X\leq ۴)=۰/۲۸۵۱$

ب- اگر $Y =$ تعداد مشتریانی که در پنج دقیقه به پای صندوق می‌رسند

آنگاه $Y\sim P(۳)$ و $P(Y\geq ۲)=۱-P(Y<۲)=۱-P(Y\leq ۱)=۱-۰/۱۹۹۱=۰/۸۰۰۹$

۱.۵.۵ تقریب توزیع دوجمله‌ای به‌وسیله توزیع پواسون

اگر در آزمایش دوجمله‌ای n عدد بزرگی باشد و p به صفر نزدیک باشد آنگاه می‌توان توزیع دوجمله‌ای را با توزیع پواسون با پارامتر $\mu=np$ تقریب زد. در حقیقت زمانی که $n\to\infty$ و $p\to ۰$ ، مقدار $\mu=np$ مقداری ثابت باشد آنگاه می‌توان نشان داد که:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(۱-p)^{n-x}=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

همچنین اگر p به یک نزدیک باشد می‌توان در آزمایش دوجمله‌ای مفاهیم موفقیت و شکست را با یکدیگر عوض کنیم و در نتیجه تقریب بالا را در این مورد هم به کار ببریم.

مثال ۳.۵.۵ اطلاعات یک شرکت بیمه نشان می‌دهد که ۰/۰۰۱ جامعه در هر سال از نوع معینی تصادف می‌میرند. احتمال اینکه این شرکت مجبور باشد برای بیشتر از ۱۵ نفر از ۱۰۰۰۰ بیمه‌گزار شرکتش در مقابل خطرات چنین تصادف‌هایی در سال مفروض غرامت بپردازد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد بیمه‌گزارانی در بین ۱۰۰۰۰ نفر باشد که در سال از تصادفی

Scanned with CamScanner

معین می‌میرند، آنگاه $X \sim B(۱۰۰۰۰, ۰/۰۰۱)$ است که چون n عددی بزرگ و p به صفر نزدیک است، پس تقریباً $X \sim P(۱۰)$ که در آن $\mu = np = ۱۰۰۰۰(۰/۰۰۱) = ۱۰$. بنابراین:

$$P(X>۱۵) = ۱ - P(X \leq ۱۵) \approx ۱ - ۰/۹۵۱۳ = ۰/۰۴۸۷$$

۶.۵ توزیع دوجمله‌ای منفی[1]

آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای خواص آزمایش دوجمله‌ای باشد با این تفاوت که آزمایش‌های مستقل برنولی را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به یک تعداد معینی از موفقیت‌ها دست یابیم. چنین آزمایشی را آزمایش دوجمله‌ای منفی گویند. برای اینکه در این حالت نحوه انجام آزمایش و توزیع احتمال مربوطه را به‌دست آوریم، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۶.۵ یک تیرانداز ۷۰٪ از تیرهای خود را به هدف می‌زند. احتمال اینکه در ششمین پرتاب چهارمین تیر او به هدف بخورد را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد تیرهای پرتاب شده تا رسیدن به چهارمین برخورد به هدف تیرها باشد آنگاه احتمال مورد نظر برابر $P(X=۶)$ است. احتمال $P(X=۶)$؛ بدین معنی است که در پرتاب ششم تیر به هدف برخورد کند (یعنی موفقیت یا S داشته باشیم) و در ۵ پرتاب اولیه ۳ تیر به هدف برخورد کرده و ۲ تیر به هدف برخورد نکنند (یعنی شکست یا F داشته باشیم). یک حالت خاص برای وقوع چنین پیشامدی SFSSFS می‌باشد که احتمال آن برابر است با:

$$(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷)(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷) = (۰/۷)^۴(۰/۳)^۲$$

و تعداد حالاتی که می‌توان در ۵ پرتاب اولیه ۳ برخورد به هدف داشته باشیم برابر $\binom{۵}{۳}$ است و بنابراین:

$$P(X=۶) = \binom{۵}{۳}(۰/۷)^۴(۰/۳)^۲ = \binom{۶-۱}{۴-۱}(۰/۷)^۴(۰/۳)^{۶-۴}$$

تعریف ۵.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

> X = تعداد آزمایش‌های مستقل برنولی تا رسیدن به r موفقیت

آنگاه X را یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p باشد آنگاه گوییم X دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای r و p است و آن را با نماد

Scanned with CamScanner

1- Negative Binomial Distribution

$X\sim NB\,(r,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به‌دست آوردن تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای منفی توجه کنید که $P(X=x)$ بدین معنی است که در xامین آزمایش ما یک موفقیت داشته باشیم و در (x-۱) آزمایش اولیه ما (r-۱) موفقیت و (x-r) شکست داشته باشیم که احتمال آن برابر است با $\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}q^{x-r}p$. بنابراین:

تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای منفی

$$f_X(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}\quad,\quad x=r,r+1,r+2,\ldots \qquad (5.5)$$

قضیه ۵.۵ اگر $X\sim NB\,(r,p)$ آنگاه $E(X)=\frac{r}{p}$ و $Var(X)=\frac{rq}{p^2}$.

مثال ۲.۶.۵ فرض کنید که ۴۰٪ از ماهی‌های یک دریاچه از نوع به‌خصوصی باشند. اگر هر بار یک ماهی گرفته و نوع آن را مشخص کنیم و دوباره به دریاچه برگردانیم.

الف- انتظار دارید که در چندمین صید ماهی، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود؟

ب- احتمال اینکه در دهمین بار، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد صید ماهی تا رسیدن به چهارمین ماهی نوع به‌خصوص باشد آنگاه $X\sim NB\,(۴,۰/۴)$ و در نتیجه:

الف-
$$E(X)=\frac{r}{p}=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰$$

پس انتظار داریم در دهمین صید، چهارمین ماهی از نوع فوق صید شود.

ب-
$$P(X=۱۰)=f_X(۱۰)=\binom{۱۰-۱}{۴-۱}(۰/۴)^۴(۰/۶)^{۱۰-۴}=۰/۱۰۰۳$$

۷.۵ توزیع هندسی[1]

اگر در توزیع دوجمله‌ای منفی r=۱ باشد آنگاه یک توزیع احتمال برای تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به یک موفقیت را به‌دست می‌آوریم. این نوع آزمایش را آزمایش هندسی گویند و توزیع مربوطه را توزیع هندسی گویند، برای مثال پرتاب یک سکه تا رسیدن به یک شیر یک آزمایش هندسی است.

تعریف ۶.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

1- Geometric Distribution

Scanned with CamScanner

$X\sim NB\,(r,p)$ نمایش می‌دهیم.

برای به‌دست آوردن تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای منفی توجه کنید که $P(X=x)$ بدین معنی است که در xامین آزمایش ما یک موفقیت داشته باشیم و در (x-۱) آزمایش اولیه ما (r-۱) موفقیت و (x-r) شکست داشته باشیم که احتمال آن برابر است با $\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}q^{x-r}p$. بنابراین:

تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای منفی

$$f_X(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}\quad,\quad x=r,r+1,r+2,\ldots \qquad (5.5)$$

قضیه ۵.۵ اگر $X\sim NB\,(r,p)$ آنگاه $E(X)=\frac{r}{p}$ و $Var(X)=\frac{rq}{p^2}$.

مثال ۲.۶.۵ فرض کنید که ۴۰٪ از ماهی‌های یک دریاچه از نوع به‌خصوصی باشند. اگر هر بار یک ماهی گرفته و نوع آن را مشخص کنیم و دوباره به دریاچه برگردانیم.

الف- انتظار دارید که در چندمین صید ماهی، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود؟

ب- احتمال اینکه در دهمین بار، چهارمین ماهی از نوع فوق مشاهده شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد صید ماهی تا رسیدن به چهارمین ماهی نوع به‌خصوص باشد آنگاه $X\sim NB\,(۴,۰/۴)$ و در نتیجه:

الف-
$$E(X)=\frac{r}{p}=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰$$

پس انتظار داریم در دهمین صید، چهارمین ماهی از نوع فوق صید شود.

ب-
$$P(X=۱۰)=f_X(۱۰)=\binom{۱۰-۱}{۴-۱}(۰/۴)^۴(۰/۶)^{۱۰-۴}=۰/۱۰۰۳$$

۷.۵ توزیع هندسی[1]

اگر در توزیع دوجمله‌ای منفی r=۱ باشد آنگاه یک توزیع احتمال برای تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به یک موفقیت را به‌دست می‌آوریم. این نوع آزمایش را آزمایش هندسی گویند و توزیع مربوطه را توزیع هندسی گویند، برای مثال پرتاب یک سکه تا رسیدن به یک شیر یک آزمایش هندسی است.

تعریف ۶.۵ اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

1- Geometric Distribution

Scanned with CamScanner

تعداد آزمایش‌های مستقل برنولی تا رسیدن به یک موفقیت $= X$

آنگاه X را یک متغیر تصادفی هندسی گویند. اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برنولی p باشد و آنگاه گوییم X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و آن را با نماد $X\sim G(p)$ نمایش می‌دهیم و تابع احتمال آن عبارت است از:

$$f_X(x)=pq^{x-1} \quad , \quad x=1,2,3,\ldots \qquad \text{تابع احتمال توزیع هندسی} \qquad (6.5)$$

مثال ۱.۷.۵ فرض کنید احتمال قبولی یک نفر در امتحان رانندگی ۰/۷ باشد. احتمال اینکه این شخص در امتحان رانندگی (الف) در مرتبه سوم، (ب) حداکثر در سومین بار قبول شود را بیابید.

حل اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد امتحان‌های رانندگی شخص تا قبول شدن باشد، آنگاه $X\sim G(0/7)$. بنابراین:

الف- $P(X=3)=f_X(3)=(0/7)(0/3)^{3-1}=0/063$

ب- $P(X\le 3)=1-P(X>3)=1-\sum_{x=4}^{+\infty}(0/7)(0/3)^{x-1}=1-\frac{(0/7)(0/3)^3}{1-0/3}$

$=1-(0/3)^3=0/973$

قضیه ۶.۵ اگر $X\sim G(p)$ آنگاه:

$$E(X)=\frac{1}{p} \quad , \quad Var(X)=\frac{q}{p^2} \quad , \quad P(X\le r)=1-q^r$$

۸.۵ توزیع یکنواخت گسسته[1]

ساده‌ترین توزیع احتمال گسسته توزیعی است که در آن متغیر تصادفی گسسته X تمام مقادیرش را با احتمالات یکسان اختیار کند. چنین توزیع احتمالی را توزیع یکنواخت گسسته گویند.

تعریف ۷.۵ اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_K$ را با احتمالات یکسان $\frac{1}{K}$ اختیار کند، آنگاه گوییم X دارای توزیع یکنواخت گسسته با پارامتر K است و آن را با نماد $X\sim DU(K)$ نمایش می‌دهیم و تابع احتمال آن عبارت است از:

Scanned with CamScanner

[1] Discrete Uniform Distribution